



עבודת קיץ במתמטיקה – לתלמידים העולים לכיתה י"א 5 יח"ל.

תלמידים יקרים, כפי שידוע לכם, השנה למדנו חלק מהנושאים המופיעים בשאלון 035571. בשנה הבאה אתם ניגשים לבגרות בשאלון זה. על מנת להיות מוכנים להיבחן וגם להמשיך בהצלחה ללמוד מתמטיקה, עליכם לפתור את עבודת הקיץ הבאה. השאלות מעבודת הקיץ תופיעו במבחן הראשון בשנה הבאה. עליכם להגיש את עבודת הקיץ בשיעור הראשון בשנה הבאה. העבודה היא עבודת קיץ שפורסמה על ידי GOOL.

בהצלחה! עבודה נעימה!

1. חוברת קיץ לעולים לכיתה יא'.....1

3.....	פונקציית פולינום:
3.....	חקירה:
4.....	פונקציה זוגית ואי זוגית:
6.....	תשובות סופיות:
8.....	פונקציית שורש:
8.....	חקירה:
9.....	תשובות סופיות:
10.....	פונקציית מנה:
10.....	חקירה:
11.....	תשובות סופיות:
12.....	בעיות קיצון:
12.....	בעיות קיצון בפולינום:
14.....	בעיות קיצון בפונקציית שורש:
15.....	בעיות קיצון בפונקציית מנה:
17.....	תשובות סופיות:
18.....	גיאומטריה - פרופורציה ודמיון:
18.....	משפט תאלס:
20.....	משפט חוצה הזווית:
21.....	דמיון משולשים:
23.....	תשובות סופיות:
24.....	טריגונומטריה במישור:
24.....	משפט הסינוסים והקוסינוסים:
26.....	שטחים:
28.....	תשובות סופיות:

29. משימות לימוד עצמי.....29

29.....	משימת לימוד 1 – אינדוקציה מתמטית:
31.....	תשובות סופיות:
33.....	משימת לימוד 2 – מעגל היחידה:
39.....	תשובות סופיות:

פונקציית פולינום:

חקירה:

(1) חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $y = x^4 - 10x^2 + 9$

ב. $y = x(x-12)(2x-9)$

ג. $y = (6-x)^8$



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$

- לאילו ערכים של הפרמטר a , עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הציבו $a = 6$ בפונקציה וחקרו אותה לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.



(3) נתונה הפונקציה: $y = (x-3)(2-x)^2$

- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2(x+a)$, $a > -6$

- ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = 4$.
- מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן, מצאו אותן.
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

פונקציה זוגית ואי זוגית:

סרטון



(1) קבעו אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

ב. $f(x) = 3x^2$

א. $f(x) = 3x - 5$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

ג. $f(x) = 2x^3$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

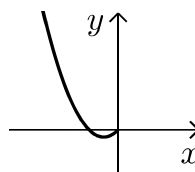
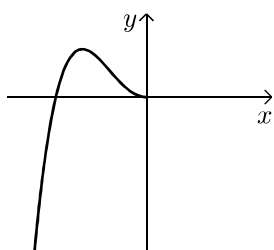
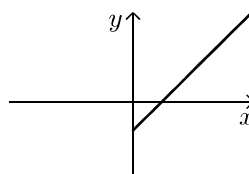
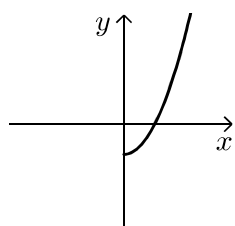
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

סרטון



(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .

השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

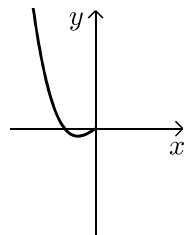
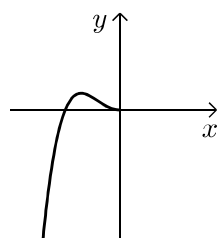
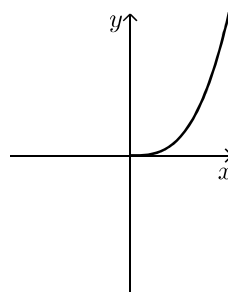
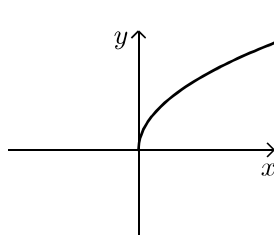


סרטון



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .

השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:





(4) לפניכם הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?

נמקו באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את גרף הפונקציה

בתחום: $[-2:2]$.



(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבססו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את הפונקציה

בתחום: $[-5:5]$ (הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$

לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

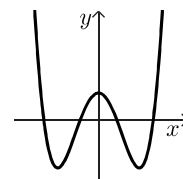
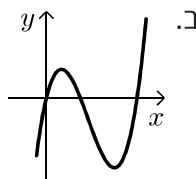
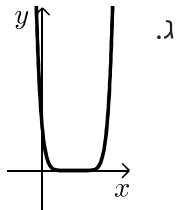
תשובות סופיות:

חקירה:

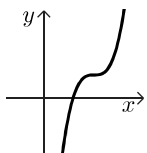
(1) תשובות עבור סעיפים i-iv:

- א. i. כל x . ii. $\min(-\sqrt{5}, -16), \max(0, 9), \min(\sqrt{5}, -16)$.
 iii. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0, x > \sqrt{5}$, יורדת: $0 < x < \sqrt{5}, x < -\sqrt{5}$.
 iv. $(0, 9), (-3, 0), (-1, 0), (1, 0), (3, 0)$.
 ב. i. כל x . ii. $\max(2, 100), \min(9, -243)$.
 iii. עולה: $x < 2, x > 9$, יורדת: $2 < x < 9$.
 iv. $(0, 0), (12, 0), (4.5, 0)$.
 ג. i. כל x . ii. $\min(6, 0)$. iii. עולה: $x > 6$, יורדת: $x < 6$. iv. $(6, 0), (0, 6)$.

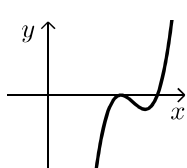
סקיצות עבור שאלה 1:



(2) א. $-6 \leq a \leq 6$. ב. כל x , אין קיצון, עולה בכל תחום הגדרה, $(0, -50)$, סקיצה:



ג. עולה: $x > 0, x < -\frac{1}{4}, -2 < x < -\frac{1}{4}$, יורדת: $x < -2, -\frac{1}{4} < x < 0$.

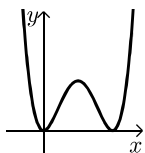


(3) א. $\max(2, 0), \min(2\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$. ב. עולה: $x > 2\frac{2}{3}, x < 2$, יורדת: $2 < x < 2\frac{2}{3}$.

ג. $(0, -12), (2, 0), (3, 0)$. ד. ראו גרף בצד:

(4) א. $y = 2x^2(x-4)^2, a = -4$. ב. $(0, 0), (2, 32), (4, 0)$.

ג. עולה: $x > 4, 0 < x < 2$, יורדת: $2 < x < 4, x < 0$.



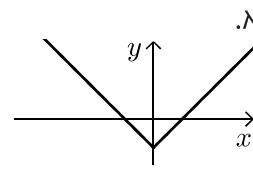
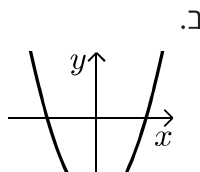
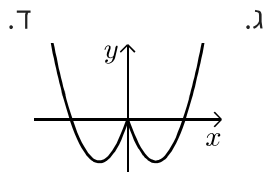
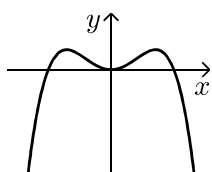
ה. חיובית: $x \neq 0, 4$. ראו גרף צד:

ד. $(4, 0), (0, 0)$.

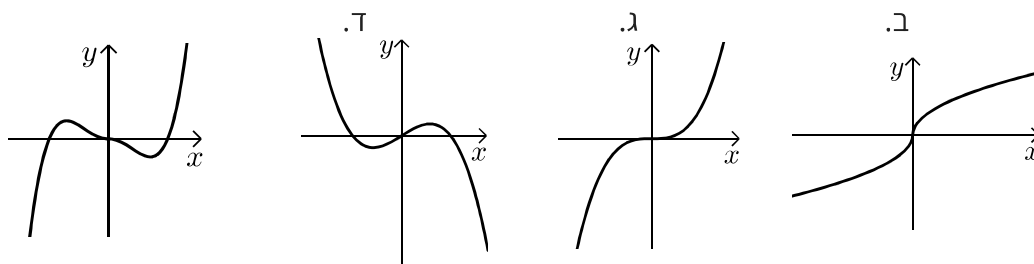
פונקציה זוגית ואי זוגית:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

(2) להלן הגרפים:



(3) להלן הגרפים:



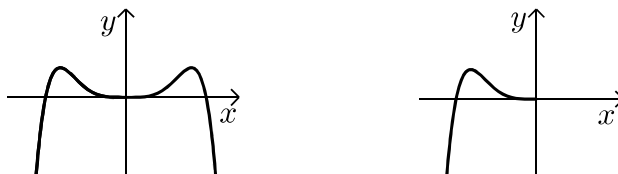
(4) א. $a=0$. ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(-1.225,0)$,

נקודות קיצון: $\min(-2, -80)$ קצה, $\max(-1, 1)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה.

עולה: $-2 < x < -1$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף ד:

סרטוט עבור סעיף א:



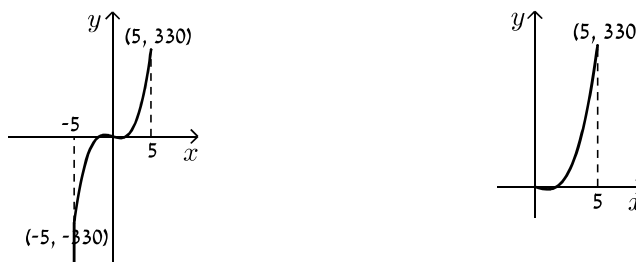
(5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3}, 0)$,

נקודות קיצון: $\max(5, 330)$ קצה, $\min(1, -6)$ קצה, $\max(0, 0)$ קצה.

עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף ג:

סרטוט עבור סעיף א:



חקירה:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:



- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:



- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .



מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y - x = 0$.

- א. מצאו את ערך הפרמטר a .
- ב. כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתבו את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



(4) לפניכם שלוש פונקציות: $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ ($k > 0$).

א. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדיקו את קביעותיכם באמצעות חישוב מתאים:

- לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.
- קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
- הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ על ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d=6$.

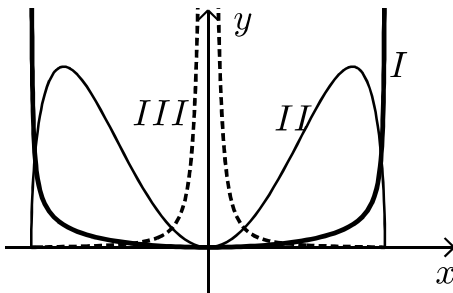
ב. מצאו את k .

ג. מצאו את נקודות הקיצון של גרף

הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. לפניכם איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.

קבעו עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

(1) א. $x \geq 1$ ב. $\max(1,0), \min(2,-2)$ קצה

ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$. ד. $(1,0), (4,0)$ ה. אין.

(2) א. $x \leq 6$ ב. $\min(6,0), \max(4,4\sqrt{2})$ קצה

ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$. ד. $(6,0), (0,0)$.

(3) א. $a = 1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$

ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$, עולה: $-1.5 < x < 3$.

(4) א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. לא נכון ב. $k = 24$

ג. $\min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$ ד. $I = g(x), II = f(x), III = h(x)$

פונקציית מנה:

חקירה:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:



- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.



- א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
- ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.



- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ב. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 - ג. הביעו באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
 - ד. ענו על הסעיפים הבאים:
 - i. מצאו עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
 - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$.
- מצאו את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5, 3)$.

- מצאו את ערך הפרמטר a וכתבו את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- העזרו בגרף הפונקציה וקבעו עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

תשובות סופיות:

(1) א. $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$.

ד. $(0, 2)$ ה. $y = 2, x = \frac{1}{3}, x = 3$.

(2) א. $f(x) = \frac{x+4}{x^2}, a = 1$ ב. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x < -8, x > 0$.

ג. $(-4, 0)$ ד. $x = 0, y = 0$.

(3) א. $x \neq 1$ ב. $x = 1, y = 1$ ג. $(a, 0), (0, a)$ ד. i. $a > 1$ ii. $a = 2$.

(4) א. $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}, a = 3$ כל x .

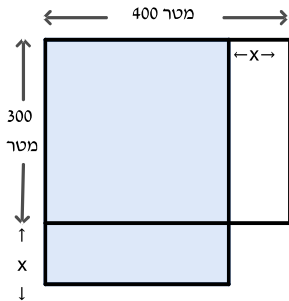
ב. $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right), \max(-2, 8)$ ג. עולה: $-2 < x < 3, x > 3$ יורדת: $x < -2$.

ד. $(2, 0), \left(0, 4\frac{2}{3}\right), \left(4\frac{2}{3}, 0\right)$ ו. $k = 8, -\frac{1}{3}, 3$.

בעיות קיצון:

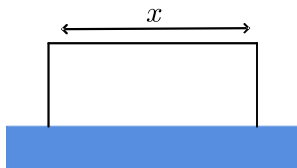
בעיות קיצון בפונקצית פולינום:

יישומון



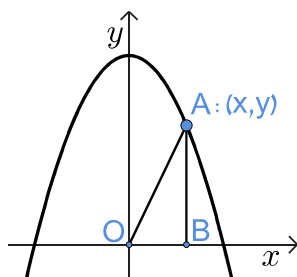
- (1) לדני יש חלקת אדמה מלבנית שאורכה 300 מטר ורוחבה 400 מטר.
דני רצה להגדיל את אורך החלקה ולהקטין את רוחבה
כך שהשטח שלה יהיה מקסימלי וההיקף שלה לא ישתנה.
נסמן את מספר המטרים שדני מוסיף לאורך ומוריד מהרוחב ב- x מטר.
א. היעזרו ביישומון ובדקו כיצד שינוי באורך של x ,
משפיע על שטח החלקה החדשה המתקבלת.
ב. בטאו באמצעות x את שטח החלקה החדשה – זו פונקציית המטרה.
ג. גזרו את הפונקציה ומצאו את הערך של x עבורו לפונקציית המטרה יש נקודות מקסימום.
ד. מצאו את שטח החלקה המקסימלי והשוו לגדלים המתקבלים ביישומון.

יישומון



- (2) לאורי גדר תיל באורך 200 מטר, אורי רוצה להשתמש בגדר
כדי לגדר חלקת אדמה בצורת האות ח' בחזית ביתו וליצור בה גינת
פרחים. מה צריך להיות אורך הגדר כך ששטח גינת הפרחים יהיה
מקסימלי. נסמן ב- x את רוחב גינת הפרחים.
א. היעזרו ביישומון ותארו כיצד משפיע רוחב גינת הפרחים על שיטחה.
ב. בטאו באמצעות x את שטח גינת הפרחים.
ג. מצאו את הערך של x עבורו שטח הגינה יהיה מקסימלי.

יישומון



- (3) נקודה A הנמצאות ברביע הראשון על גרף על הפרבולה $y = -x^2 + 4$.
מנקודה A הורידו אנך לציר ה- x שחותך אותו בנקודה B.
הישר AO מחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים (O).
כך שנוצר משולש ישר זווית ABO.
היעזרו ביישומון וענו על הסעיפים הבאים:
א. טיילו עם הנקודה A לאורך הפרבולה (ברביע הראשון),
מה קורה לשטח המשולש שנוצר?
ב. נסמן את שיעור ה- x של נקודה A באות t .
הביעו באמצעות t את שטח המשולש ABO, מה תחום ההגדרה של t ?
ג. מבין כל המשולשים ישרי הזווית מצאו את t עבורו מתקבל המשולש בעל השטח
המקסימלי.



(4) נקודה A נמצאות על גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 2$ מנקודה A הורידו אנך לציר ה-x החותך

את גרף הפונקציה $g(x) = -x^2 + 2x - 4$ בנקודה B.

היעזרו ביישומון וענו על השאלות הבאות:

א. "טיילו" עם הנקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$.

כיצד משפיע מיקום הנקודה על אורך הקטע AB?

ב. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.

הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB (פונקציית מטרות).

ד. מצאו את הערך של t עבורו האורך של AB הוא מינימלי.

(5) נקודה A נמצאות על גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 16x + 48$ ברביע הרביעי.

מנקודה A מעבירים ישר מקביל לציר ה-x ושחותך את גרף הפונקציה בנקודה B. מחברים את הנקודות A ו-B עם הנקודות D ו-C שהן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x (ראו סרטוט).

א. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.

הביעו באמצעות t (במידת הצורך) את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. מצאו את משוואת ציר הסימטריה של הפונקציה.

ג. הביעו באמצעות t (במידת הצורך)

את אורך הקטעים AB ו-DC.

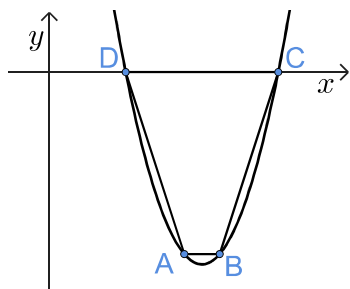
ד. מה תחום הערכים ש-t יכול לקבל?

ה. הביעו באמצעות t את גובה הטרפז.

ו. האם אורך גובה הטרפז שווה לשיעור ה-y של הנקודה A?

ז. הביעו את שטח הטרפז שנוצר באמצעות t.

ח. מצאו את שטח הטרפז המקסימלי (עד שתי ספרות אחרי הנקודה).



(6) על גרף הפרבולה $y = -x^2 + 2$ ברביע הראשון (כולל הצירים) נקודה A.

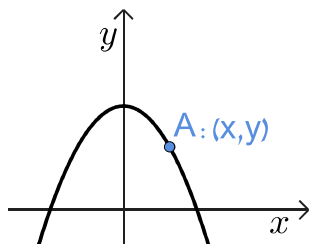
א. מה תחום הערכים של x שמתאים לתנאי הבעיה?

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורה

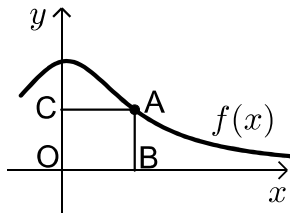
סכום ריבועי שיעורי הנקודה הוא מקסימלי.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורה

סכום ריבועי שיעורי הנקודה הוא מינימלי.



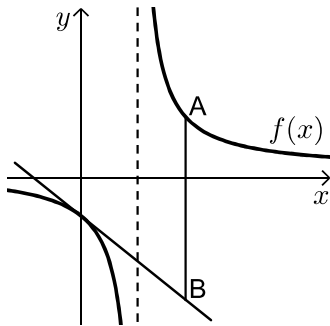
בעיות קיצון בפונקציית מנה:



(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור. א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. מצאו את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע

הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

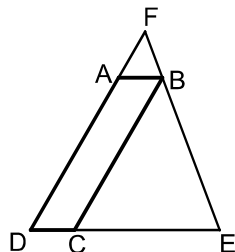
ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



(3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



(4) המרובע ABCD הוא מקבילית.

מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשיקי הצלעות DC ו-AD.

ידוע כי מידות המקבילית הן: $AB = 2$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ.

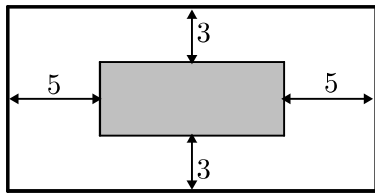
מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?





(5)

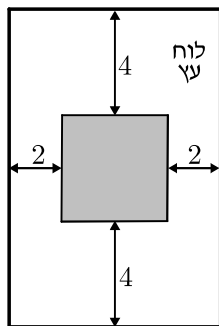
חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



(6)

אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת מלבנית לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?



תשובות סופיות:

בעיות קיצון בפונקצית פולינום:

$$(1) \quad f(x) = (400 - x) \cdot (300 + x) \quad \text{ב.} \quad x = 50 \quad \text{ג.} \quad \text{ד. } 122,500 \text{ מ"ר.}$$

$$(2) \quad f(x) = \left(\frac{200 - x}{2} \right) \cdot x \quad \text{ב.} \quad x = 100 \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad 0 < t < 2, \quad \frac{1}{2} \cdot (-t^3 + 4t) \quad \text{ב.} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ג.}$$

$$(4) \quad A(t, t^2 + 2), B(t, -t^2 + 2t - 4) \quad \text{ב.} \quad f(t) = 2t^2 - 2t + 6 \quad \text{ג.} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

$$(5) \quad A(t, t^2 - 16t + 48), A(16 - t, t^2 - 16t + 48), D(4, 0), C(12, 0) \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } x = 8, \quad \text{ג. } DC = 8, AB = 16 - 2t$$

$$\text{ד. } 4 < t < 8, \quad \text{ה. } -t^2 + 16t - 48, \quad \text{ו. } 78.85$$

$$\text{ז. } \frac{(24 - 2t) \cdot (-t^2 + 16t - 48)}{2}$$

$$(6) \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad \text{א.} \quad A(0, 2) \quad \text{ב.} \quad A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ג.}$$

בעיות קיצון בפונקציית שורש:

$$(1) \quad A(1, 2)$$

$$(2) \quad l = t + 6 - 3\sqrt{t} \quad \text{א.} \quad t = 2.25 \quad \text{ב.}$$

$$(3) \quad 2\sqrt{5}R - 2a \quad \text{יחידות אורך.}$$

בעיות קיצון בפונקציית מנה:

$$(1) \quad A(2, 2) \quad \text{א.} \quad A(0, 4) \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad y = -3x - 5 \quad \text{א.} \quad A(4, 7) \quad \text{ב.} \quad AB = 24 \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad \left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$(4) \quad DF = \frac{8x}{x-2} \quad \text{א.} \quad x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2} \quad \text{ב.} \quad L = 18 \quad \text{ג.}$$

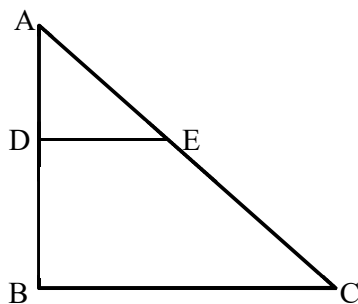
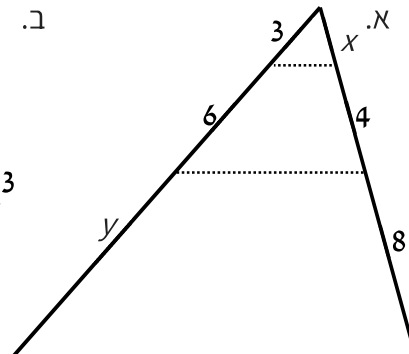
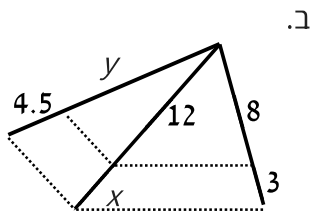
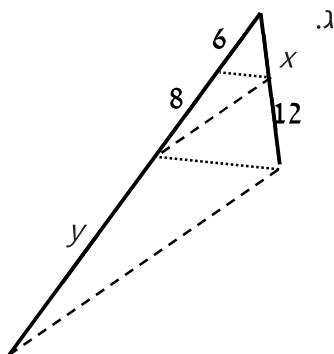
$$(5) \quad 6 \text{ ס"מ על } 10 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad 12 \text{ ס"מ על } 20 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.}$$

$$(6) \quad 11 \text{ ס"מ על } 22 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad S = 98 \quad \text{ב.}$$

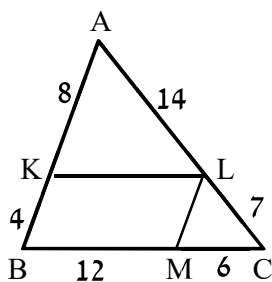
גיאומטריה - פרופורציה ודמיון:

משפט תאלס:

- (1)** חשבו את אורכי הקטעים x ו- y בסרטוטים שלפניכם (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:



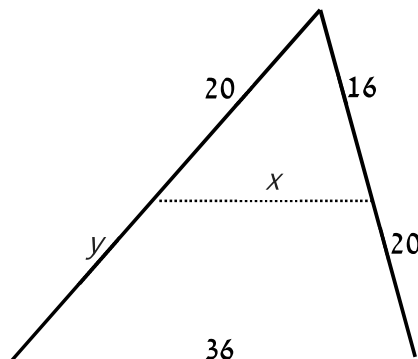
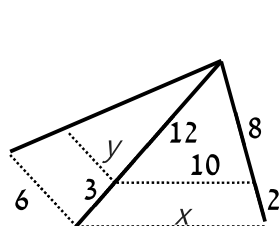
- (2)** במשולש שלפניכם נתון $DE \parallel BC$.
 כמו כן: $\angle ADE = 90^\circ$
 וכן: $AE = BD = 10$ ס"מ, $DE = 8$ ס"מ.
 מצאו את אורכי AD , CE ו- BC .

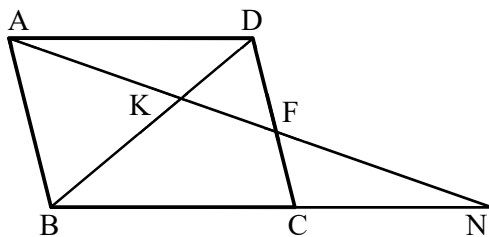
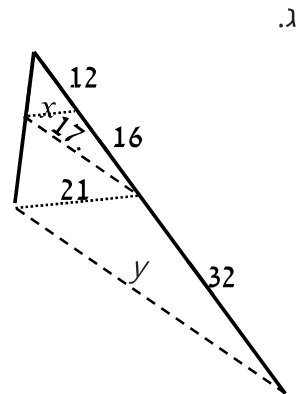
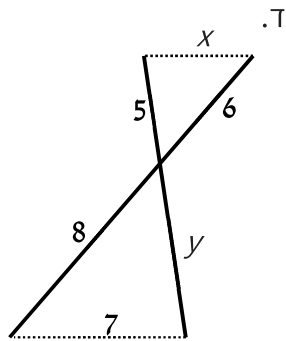


- 3** מרובע KLMB חסום במשולש ABC.
הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.
כל המידות הן בס"מ.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.



- (4)** חשבו את x ואת y בסרטוטים שלפניכם (הקטעים המקווקעים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

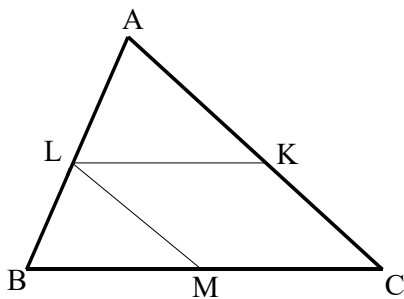




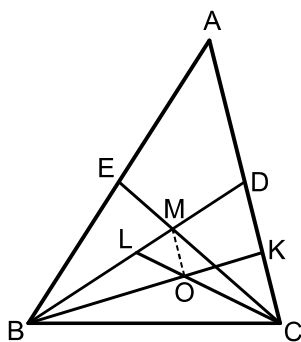
- (5) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$

ב. $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$



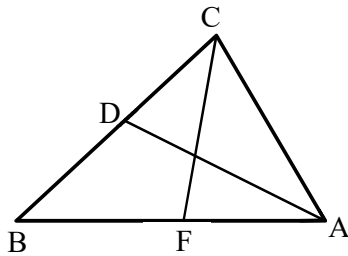
- (6) בסרטוט נתון: $\frac{AK}{CK} = \frac{CM}{BM} = \frac{AL}{BL}$.
א. הוכיחו: המרובע KLMC הוא מקבילית.
ב. נתון: $AL = 1.5BL$, $BC = 10$ ס"מ. חשבו את אורך הקטע LK.



- (7) במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE אשר נפגשים בנקודה M. במשולש BDC מעבירים את התיכונים BK ו-CL הנפגשים בנקודה O.
א. הוכיחו כי: $3LM = BL$.
ב. הוכיחו כי: $AC \parallel MO$.
ג. נתון: $S_{BLC} = 27$. חשבו את שטח המשולש MOL.

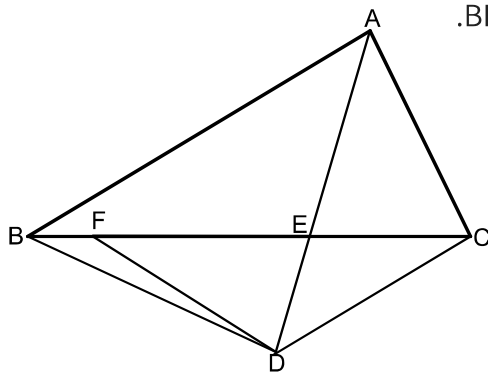


משפט חוצה הזווית:



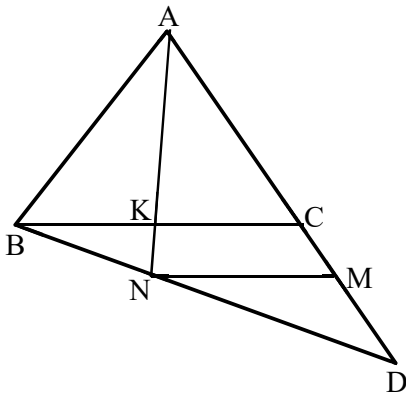
- (1) הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.
נתון: $AB = 18$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $CD = 6$ ס"מ.
חשבו את אורך הקטע AF.

סרטון



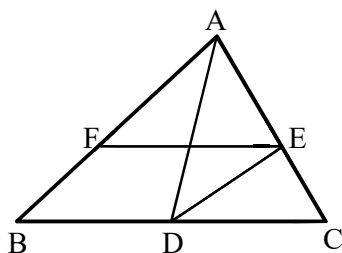
- (2) נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש. ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC. F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$. הצלע AB מקבילה לצלע DC.
א. הוכיחו כי: $AC = EF$.
ב. הוכיחו: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.
ג. מסמנים נקודה G על AB ומחברים אותה עם הנקודה D כך ש- $DG \parallel AC$.
ד. הוכיחו כי המרובע ACDG הוא מעוין.

סרטון



- (3) נתון משולש ABC. ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D. מחברים את הנקודה D עם הקודקוד B. מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC. המשך AK חותך את BD בנקודה N. מעבירים את הקטע MN. נתון: $BC \parallel MN$.

סרטון

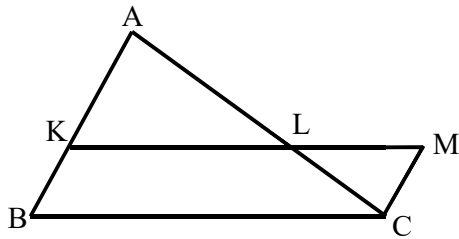


- (4) נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC. נתון כי DE הוא חוצה זווית ADC ו-DF הוא חוצה זווית ADB.
הוכיחו: $EF \parallel BC$.

סרטון

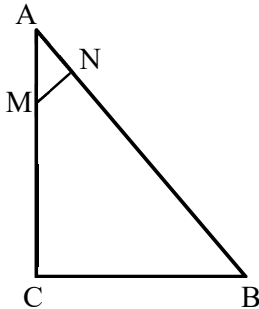


דמיון משולשים:



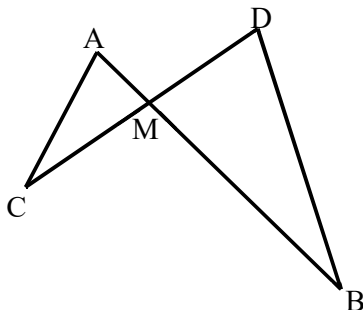
- (1) נתונה מקבילית BKMC.
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
הוכיחו: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.

סרטון



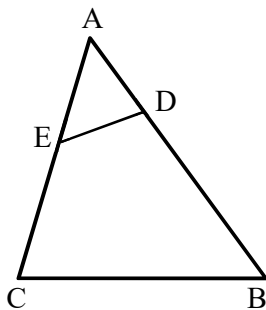
- (2) המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: $AB = 20$ ס"מ, $AN = 4$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.
מצאו את אורך הקטע AM.

סרטון



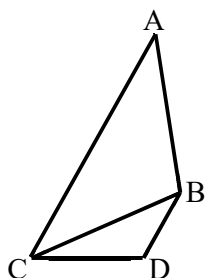
- (3) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: $AM = 3$ ס"מ, $BM = 10$ ס"מ, $CM = 6$ ס"מ, $DM = 5$ ס"מ.
א. הוכיחו כי: $\triangle AMC \sim \triangle BMD$.
ב. האם $AC \parallel BD$? נמקו.
ג. מצאו את אורכו של AC.
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.

סרטון



- (4) לפניכם משולש ABC.
מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
 $AD = 4$ ס"מ, $BD = 11$ ס"מ, $AE = 5$ ס"מ, $CE = 7$ ס"מ.
א. הוכיחו כי: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
ב. הוכיחו כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.

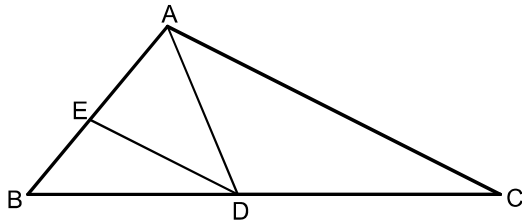
סרטון



- (5) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: $AC = 16$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ, $BD = 4$ ס"מ.
א. הוכיחו כי שני המשולשים דומים ורשמו אותם לפי סדר התאמת קודקודיהם.
ב. הוכיחו כי: $AC \parallel BD$.

סרטון





(6) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות

על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.

נתון כי: $DE \parallel AC$, $\angle ADC = \angle BED$.

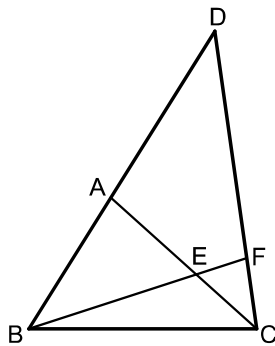
א. הוכיחו: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ב. ידוע כי הנקודה D מחלקת

$$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$$

את הצלע BC באופן הבא:

וכי: $AD \cdot BD = 16$. חשבו את המכפלה: $AB \cdot AC$.



(7) מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC

כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים ($AC = AD$).

הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים:

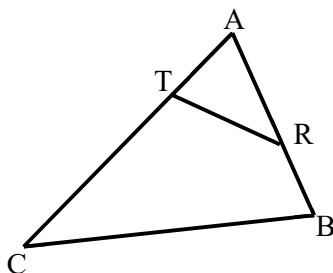
$$\angle D = \angle CBF, \quad 3 \cdot \angle ACD = \angle BEC$$

א. הוכיחו כי הקטע BF חוצה את זווית B.

ב. הוכיחו כי: $\triangle AEB \sim \triangle FEC$.

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$$

ג. הוכיחו כי:



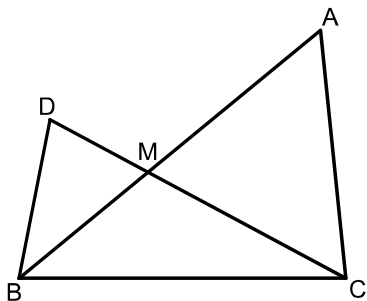
(8) בסרטוט שלפניכם נתון משולש ABC ובו קטע RT

כך שמתקיימים האורכים הבאים:

$$AR = 4 \text{ ס"מ}, \quad AT = 6 \text{ ס"מ}, \quad BR = 4 \text{ ס"מ}$$

$$CT = 11 \text{ ס"מ}, \quad S_{ABC} = 60 \text{ סמ"ר}$$

מצאו את שטח המרובע RTCB.



(9) נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC

בונים משולש נוסף BDC.

הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M.

הצלע AB חוצה את זווית B וידוע

$$2 \cdot \angle ACD = \angle B$$

א. הוכיחו: $\triangle ACM \sim \triangle DBM$.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$$

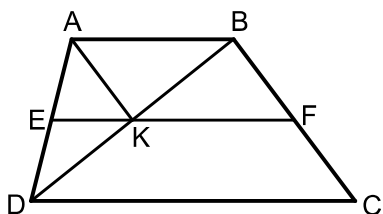
ב. הוכיחו:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$$

ג. נתון כי: וקי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ. סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ.

$$\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$$

חשבו את היחס:



10 המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \parallel CD)$.

מעבירים את קטע האמצעים EF החותך

את אלכסון הטרפז BD בנקודה K.

ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.

א. הוכיחו כי המרובע ABFK הוא מקבילית.

ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.

הביעו באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.

תשובות סופיות:

משפט תאלס:

(1) א. $x = 2, y = 12$ ב. $x = 4.5, y = 12$ ג. $x = 9, y = 18\frac{2}{3}$

(2) 6 ס"מ $AD = 6$, $21\frac{1}{3}$ ס"מ $BC = 21\frac{1}{3}$, $16\frac{2}{3}$ ס"מ $CE = 16\frac{2}{3}$. (3) שאלת הוכחה.

(4) א. $x = 16, y = 25$ ב. $x = 12.5, y = 4.8$ ג. $x = 9, y = 37.5$ ד. $x = 5.25, y = 6\frac{2}{3}$

(5) שאלת הוכחה.

(6) א. שאלת הוכחה. ב. 6 ס"מ.

(7) שאלת הוכחה.

משפט חוצה זווית:

(1) 8 ס"מ.

דמיון משולשים:

(1) שאלת הוכחה. (2) 5 ס"מ.

(3) א. שאלת הוכחה. ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

(5) א. $\triangle ABC \sim \triangle CDB$. ב. שאלת הוכחה.

(6) א. שאלת הוכחה. ב. $AB \cdot AC = 36$.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 50.4 סמ"ר.

(9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$.

(10) א. שאלת הוכחה. ב. $6S$.

טריגונומטריה במישור:

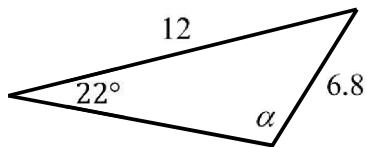
משפט הסינוסים והקוסינוסים:

(1) מצאו את ערכו של $\alpha / x / y$ במשולשים הבאים:

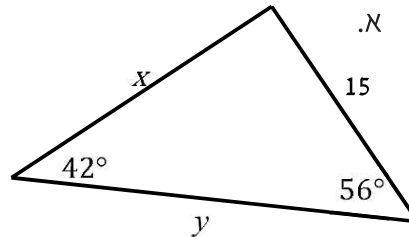
סרטון



א.



א.

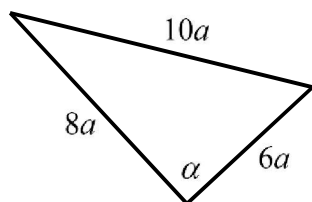


(2) מצאו את ערכו של α / x במשולשים הבאים:

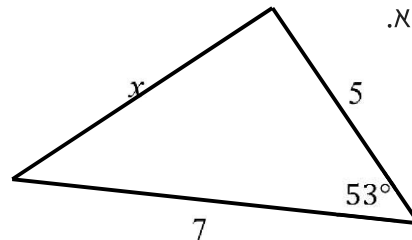
סרטון



א.

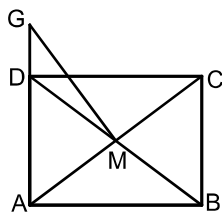


א.



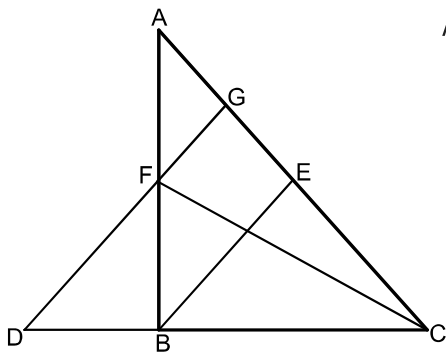
(3) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M. הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD. נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ, $DG = 1.2$ ס"מ. מצאו את גודלו של הקטע GM.

סרטון



(4) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M. מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

סרטון



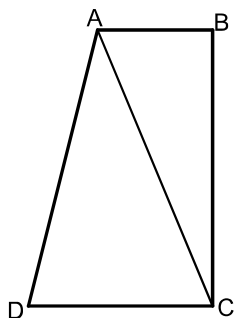
א. הוכיחו: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ.

חשבו את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\angle ACD = 48.189^\circ$.

הוכיחו כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



(5) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$).

מסמנים את הבסיס: $DC = 3t$ ואת השוק $AD = 4t$.

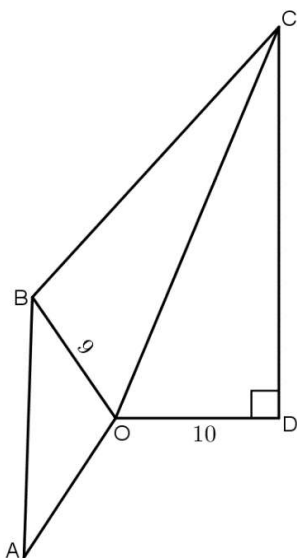
ידוע גם כי: $\angle D = 60^\circ$.

א. הביעו באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. מצאו את זווית ACB אם ידוע כי $AB = t$.

ג. נתון: $BC = 4\sqrt{3} = 6.928$ ס"מ.

חשבו את שטח הטרפז ABCD.



(6) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α .

המשולש COD הוא ישר זווית $\angle CDO = 90^\circ$.

נתונים האורכים: $BO = 9, DO = 10$.

מסמנים: $BC = 1.4m, CD = 1.5m$.

א. הביעו באמצעות m את $\sin \alpha$.

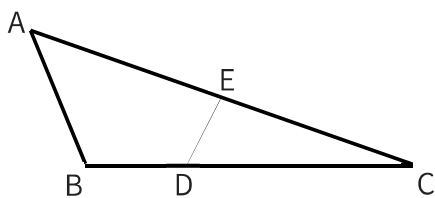
(העזרו במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$. מצאו את m .

אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשבו את זווית BOC.



(7) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

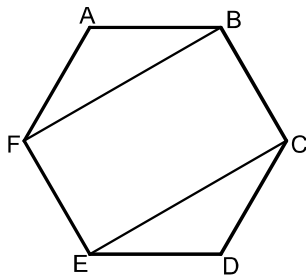
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $BC = b, AB = a$.

הביעו באמצעות a ו- b את אורך הקטע DE.

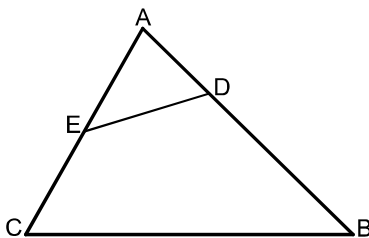
שטחים:

סרטון



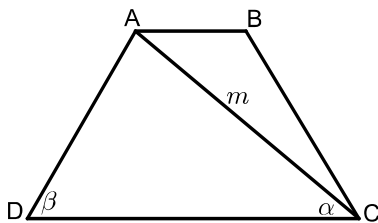
- (1) באיור שלפניכם נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S .
 א. הביעו באמצעות S את אורך צלע המשושה.
 ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
 הביעו באמצעות S את שטח המלבן.

סרטון

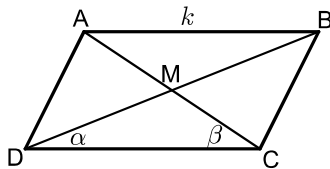


- (2) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
 הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת: $AD = 3$ ס"מ.
 ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.
 א. מצאו את אורך הקטע DE.
 ב. חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
 ג. חשבו את שטח המרובע BCED.

סרטון



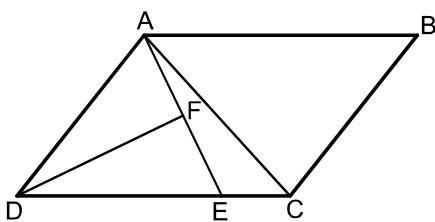
- (3) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
 הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
 מסמנים: $AC = m$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.
 א. הביעו באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
 ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $S_{ADC} / S_{ABC} = 3$.
 הביעו באמצעות α , β ו- m את הבסיס AB.
 ג. חשבו את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ ו- $m = 8$.



- (4) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה M כמתואר באיור. מסמנים: $AB = k$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.



- א. הוכיחו כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.
- ב. ענו על השאלות הבאות:
- הביעו באמצעות α ו- k את שטח המשולש DMC.
 - הביעו באמצעות α ו- k את שטח המקבילית ABCD.
 - נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראו כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.



- (5) המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: $3CE = DE$. מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE. ידוע כי: $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$. מסמנים: $CE = k$.
- הביעו באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.
 - מעבירים את האלכסון AC. הביעו באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.
 - היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצאו את α .



תשובות סופיות:

משפט הסינוסים והקוסינוסים:

$$(1) \quad x = 18.58 \text{ מ"ד}, y = 22.2 \text{ מ"ד} \quad \alpha = 41.382^\circ \quad \text{או} \quad \alpha = 138.618^\circ$$

$$(2) \quad x = 5.646 \text{ מ"ד} \quad \alpha = 90^\circ$$

$$(3) \quad GM = 3.360 \text{ מ"ד}$$

$$(4) \quad DG = 18$$

$$(5) \quad AC = t\sqrt{13} \quad \angle ACB = 16.1^\circ \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 16\sqrt{3} \approx 27.712 \text{ סמ"ר}$$

$$(6) \quad \sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}} \quad \text{ג.} \quad m = 16 \quad 56.94^\circ$$

$$(7) \quad DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$$

שטחים:

$$(1) \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ג.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(2) \quad DE = 2.53 \text{ מ"ד} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(3) \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ג.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(4) \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ג.} \quad \text{i.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ii.} \quad \text{ג.}$$

$$(5) \quad AE = 6k \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$$

$$\alpha = 14.47^\circ$$